13.5.59 α) $A=0{,}08\,m$ $\lambda=2m$, $f=\frac{v}{\lambda}=50Hz \Rightarrow \omega=100\pi t$

β) $\psi_1(x,t)=0{,}08\,\eta\mu(100\pi t-\pi x)$ (SI)

γ) $D=m\omega^2=2\cdot10^{-3}kg(100\pi)^2(rad/s)^2 \Rightarrow D=200\,N/m$

$E=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}200\cdot(8\cdot10^{-2})^2 \Rightarrow E=0{,}64J$

δ) $x_\delta=(2k+1)\frac{\lambda}{4}=(2\cdot10+1)\frac{\lambda}{4}=21\frac{\lambda}{4}=21\cdot\frac{2}{4}=10{,}5m$

14. Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

14.3.1 Πρέπει $\frac{E_0}{B_0}=c=3\cdot10^8 m/s$ και η ταχύτητα διάδοσης $v=\lambda f$ να είναι $v=3\cdot10^8\frac{m}{s}=c$

1η παρατήρηση: και στις τρείς περιπτώσεις ισχύει $\frac{E_0}{B_0}=c=3\cdot10^8 m/s$

2η παρατήρηση:

1ο κύμα: $2\pi f=24\pi\cdot10^{10} \Rightarrow f=12\cdot10^{10}Hz$, $8\pi10^4x=\frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{4}\cdot10^{-4}m$ $\Big\}$ $v=\lambda f \Rightarrow v=3\cdot10^6 m/s \neq c$

2ο κύμα: $2\pi f=12\pi\cdot10^{10} \Rightarrow f=6\cdot10^{10}Hz$, $4\pi10^2x=\frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}\cdot10^{-2}m$ $\Big\}$ $v=\lambda f \Rightarrow v=3\cdot10^8 m/s=c$

3ο κύμα: $2\pi f=18\pi\cdot10^{10} \Rightarrow f=9\cdot10^{10}Hz$, $6\pi\cdot10^2x=\frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}\cdot10^{-2}m$ $\Big\}$ $v=\lambda f \Rightarrow v=3\cdot10^8 m/s=c$

Στο κύμα αυτό οι $E(x,t)$ και $B(x,t)$ δεν μπορούν οι είναι εξισώσεις των ΗΜ κύματος διότι δεν έχουν την ίδια φάση

Άρα σωστή η (β).

14.3.2 (1,ε)-(2-α)-(3-δ)-(4-β)-(5-γ)

14.3.3 (1-γ), (2-α), (3-δ), (4-β), (5-στ)

14.3.4. $\omega=24\pi\cdot10^{10} \Rightarrow f=12\cdot10^{10}Hz$, $8\pi\cdot10^4=\frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{4}10^{-4}m$ $\Big\}$ $v=\lambda f=3\cdot10^6 m/s \neq c$

Απάντηση: Όχι

14.3.5. $\frac{E_0}{B_0}=\frac{30}{10^{-7}}=3\cdot10^{8}\,m/s=c$, $\omega=12\pi\cdot10^{10}\Rightarrow f=6\cdot10^{10}Hz$

$8\pi\cdot10^{2}=\frac{2\pi x}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}\cdot10^{-2}m$, $v=\lambda f=1{,}5\cdot10^{8}\,m/s\neq c$

14.3.6 $-(\gamma)$

14.3.7 Α) $f=10^{8}Hz\Rightarrow\omega=2\pi\cdot10^{8}\,rad/s$, $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^{8}}{10^{8}}=3m$

$\frac{E_0}{B_0}=c\Rightarrow B_0=\frac{E_0}{c}=\frac{6\cdot10^{3}}{3\cdot10^{8}}\Rightarrow B_0=2\cdot10^{-5}T$

$E(x,t)=6\cdot10^{3}\,\eta\mu(2\pi\cdot10^{8}t-\frac{2\pi x}{3})$

$B(x,t)=2\cdot10^{-5}\,\eta\mu(2\pi\cdot10^{8}t-\frac{2\pi x}{3})$

Β) $E=6\cdot10^{3}\,\eta\mu(2\pi\cdot10^{8}\frac{10^{-6}}{24}-\frac{2\pi}{3}12)\Rightarrow E=6\cdot10^{3}\,\eta\mu(\frac{200\pi}{24}-8\pi)$

$\Rightarrow E=6\cdot10^{3}\,\eta\mu\frac{\pi}{3}\Rightarrow E=3\sqrt{3}\,V/m$

$\frac{E}{B}=c\Rightarrow B=\sqrt{3}\cdot10^{-5}T$

14.3.8. Α) $E=4\cdot10^{5}\,\eta\mu(4\pi\cdot10^{8}t-\frac{4\pi x}{3})$

$E_0=4\cdot10^{5}\frac{V}{m}$, $\omega=4\pi\cdot10^{8}\Rightarrow2\pi f=4\pi\cdot10^{8}\Rightarrow f=2\cdot10^{8}Hz$

$\frac{4\pi x}{3}=\frac{2\pi x}{\lambda}\Rightarrow\lambda=1{,}5m$, $v=\lambda f=3\cdot10^{8}\,m/s=c$,

Άρα το κύμα διαδίδεται στο κενό

Β) $\frac{E_0}{B_0}=c\Rightarrow B_0=\frac{E_0}{c}=\frac{4\cdot10^{5}}{3\cdot10^{8}}\Rightarrow B_0=\frac{4}{3}\cdot10^{-3}T$

$B=\frac{4}{3}\cdot10^{-3}\,\eta\mu(4\pi\cdot10^{8}t-\frac{4\pi}{3}x)$ (SI)

Γ. α) $B=\frac{E}{c}=\frac{2\cdot10^{5}}{3\cdot10^{8}}\Rightarrow B=\frac{2}{3}\cdot10^{-3}T$

β) $E=4\cdot10^{5}\,\eta\mu(\underbrace{4\pi\cdot10^{8}t_1-\frac{4\pi x_1}{3}}_{\varphi})=2\cdot10^{5}\Rightarrow\eta\mu\varphi=\frac{1}{2}$ $\begin{cases}\varphi=2k\pi+\pi/6\\ \varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}$

$E=4\cdot10^{5}\,\eta\mu\left[4\pi\cdot10^{8}(t_1+\frac{5\cdot10^{-9}}{3})-\frac{4\pi x_1}{3}\right]=4\cdot10^{5}\,\eta\mu(4\pi\cdot10^{8}t_1-\frac{4\pi x_1}{3}+\frac{2\pi}{3})$

$\Rightarrow E=4\cdot10^{5}\,\eta\mu(\varphi+\frac{2\pi}{3})$ (1)

1) Αν $\varphi=2k\pi+\pi/6\xrightarrow{(1)}E=4\cdot10^{5}\,\eta\mu(2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow E=2\cdot10^{5}\,V/m$

2) Αν $\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\xrightarrow{(1)}E=4\cdot10^{5}\,\eta\mu(2k\pi+\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow E=-4\cdot10^{5}\,V/m$

14.3.9 $E=4\cdot10^{5}\, ημ(8π\cdot10^{8}t-4πx)$

A) $ω=8π\cdot10^{8} \Rightarrow f=4\cdot10^{8}\,Hz$, $4πx=\frac{2πx}{λ}$ ή $λ=0,5\,m$

$v=λf=2\cdot10^{8}\,m/s < c$

Άρα δεν διαδίδεται στο κενό

B) $B_0=\frac{E_0}{v}=\frac{4\cdot10^{5}}{2\cdot10^{8}} \Rightarrow B_0=2\cdot10^{-3}\,T$

$B(x,t)=2\cdot10^{-3}\, ημ(8π\cdot10^{8}t-4πx)$ (SI)

Γ) $\frac{c}{v}=\frac{3\cdot10^{8}}{2\cdot10^{8}}=1,5 \Rightarrow n=1,5$

14.3.10 A) $f=100\,MHz \Rightarrow f=10^{8}\,Hz$, $c=3\cdot10^{8}\,m/s$

$λ=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^{8}}{10^{8}} \Rightarrow λ=3\,m$

διάσταση κεραίας $\simeq λ=3\,m$

B) $B_0=\frac{E_0}{c}=\frac{5}{3}\cdot10^{-5}\,T$

$$\left.\begin{array}{l} E(x,t)=5\cdot10^{3}\, ημ\left(2π\cdot10^{8}t-\frac{2πx}{3}\right) \\ B(x,t)=\frac{5}{3}10^{-5}\, ημ\left(2π\cdot10^{8}t-\frac{2πx}{3}\right) \end{array}\right\} SI)$$

Γ) Πρέπει $ω=ω_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}}=ω$ ή $ω^2=\frac{1}{LC}$ ή $C=\frac{1}{Lω^2} \Rightarrow C=\frac{1}{1,25\cdot(2π\cdot10^{8})^2}$

$C=2\cdot10^{-18}\,F$

14.3.11 α) $f=50\,MHz=5\cdot10^{7}\,Hz$ $c=λf \Rightarrow λ=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^{8}}{5\cdot10^{7}}$ ή $λ=6\,m$

Τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο έχουν το ίδιο μήκος κύματος

β) Έστω P σημείο απόσβεσης

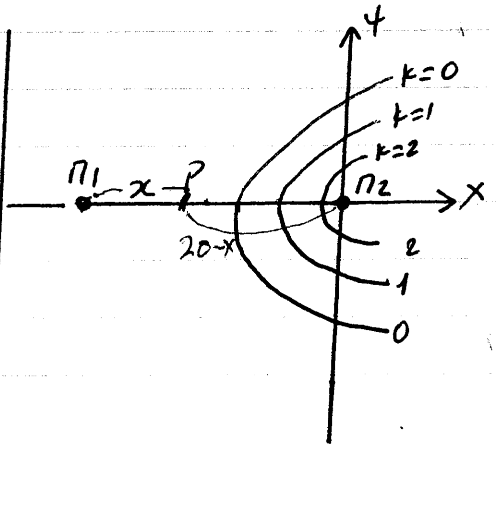
$Π_1P-Π_2P=(2k+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow x-(20-x)=(2k+1)3$

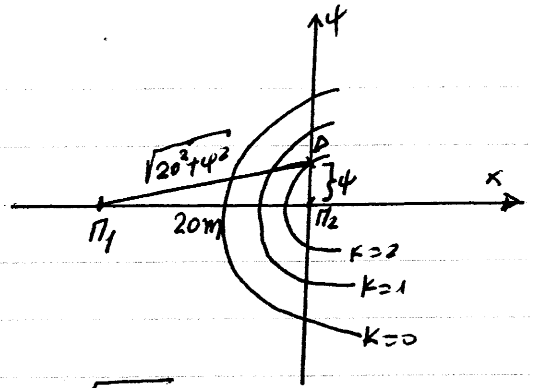
$\Rightarrow 2x-20=6k+3 \Rightarrow x=3k+11,5$

$0\le x\le 20 \Rightarrow 0\le 3k+11,5\le 20$ ...

$k=-3,-2,-1,0,1,2$

Άρα έχουμε 6 σημεία απόσβεσης στις θέσεις $x=3k+11,5$





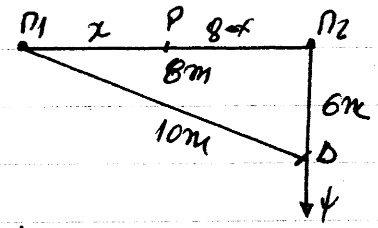
γ) Ο δέκτης Δ θα καταγράψει τόσες αποσβέσεις σήματος όσα τα σημεία απόσβεσης στην $Π_2ψ$. Τα σημεία απόσβεσης στην $Π_2ψ$ είναι τρία ($k=0,1,2$), σημεία τομής των υπερβολών απόσβεσης με την $Π_2ψ$

$Π_1Δ-Π_2Δ=(2k+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow \sqrt{20^2+ψ^2}-ψ=(2\cdot2+1)\frac{6}{2} \Rightarrow \sqrt{400+ψ^2}-ψ=15 \Rightarrow ψ=5{,}83m$

14.3.12 Α) $f=150MHz=15\cdot10^7 Hz$, $λ=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^8}{15\cdot10^7} \Rightarrow λ=2m$

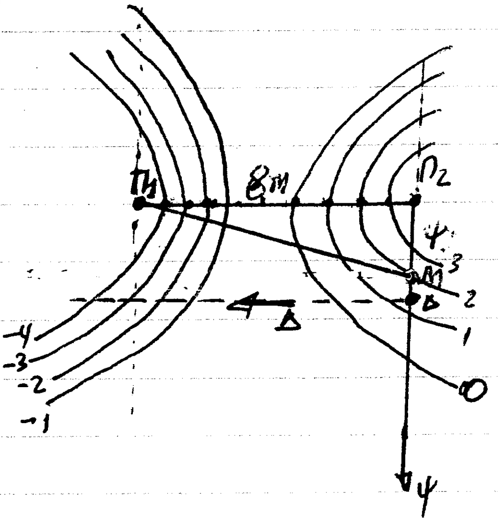
Β) $Π_1Δ=\sqrt{Π_1Π_2^2+Π_2Δ^2}=10m$, $Π_1Δ-Π_2Δ=4m=2λ$, άρα το Δ βρίσκεται στη 2η υπερβολή ενίσχυσης δεξιά της μεσοκαθέτου. Σωστή η πρόταση (i).

Γ) Θα βρούμε πόσες υπερβολές απόσβεσης υπάρχουν μεταξύ $Π_1$ και $Π_2$.



Για ένα σημείο P που έχουμε απόσβεση
$Π_1P-Π_2P=(2k+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow x-(8-x)=(2k+1)\cdot1$
$\Rightarrow x=k+4{,}5$ με $0\le x\le 8 \Rightarrow -4{,}5\le k\le 3{,}5$
$k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$. Άρα μεταξύ $Π_1$ και $Π_2$ υπάρχουν 8 υπερβολές απόσβεσης.

Αν ο δέκτης Δ κινηθεί παράλληλα προς την $Π_1Π_2$ θα καταγράψει – (πιθανόν) – έξι (6) αποσβέσεις, όσες οι τομές με τις υπερβολές απόσβεσης.



Δi) δύο (2) αποσβέσεις ($k=2$, $k=3$)

Δii) Η πρώτη απόσβεση που θα καταγράψει θα είναι στο Μ (... $k=2$)

Θέτουμε $Π_2M=ψ$, $Π_1M=\sqrt{8^2+ψ^2}$

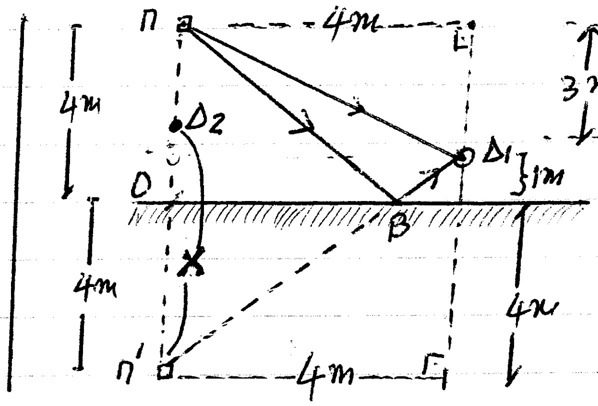
$Π_1M-Π_2M=(2k+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow \sqrt{64+ψ^2}-ψ=5 \Rightarrow 64+y^2=25+y^2-10y$

$\Rightarrow y=3{,}9\ m \rightsquigarrow Π_2M=3{,}9m.$

14.3.13 α) Ο δέκτης $Δ_1$ λαμβάνει κύματα

→ Ευθείας από την πηγή Π. (διαδρομή $ΠΔ_1$)

→ Ύστερα από ανάκλαση στη θάλασσα (διαδρομή $ΠΒΔ_1$).



Τα κύματα αυτά είναι σαν να προέρχονται από την υποθετική πηγή Π' συμμετρική της Π ως προς τη θάλασσα. Εξαιτίας αυτής της συμβολής έχουμε μέγιστα και αποσβέσεις σήματος.

β) Την πρώτη απόσβεση για τον $Δ_1$ την έχουμε σε ύψος 1m από τη θάλασσα → (Η θάλασσα είναι η μεσοκάθετος της Π'Π) → δηλ. σε υπερβολή απόσβεσης με $k=0 \Rightarrow Π'Δ_1 - ΠΔ_1 = λ/2$ (1)

$Π'Δ_1 = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41} = 6{,}4\,m$; άρα (1) $\Rightarrow 6{,}4 - 5 = λ/2 \Rightarrow$

$ΠΔ_1 = \sqrt{3^2+4^2} = 5\,m$ $\Rightarrow λ = 2{,}8\,m$

$c = λ \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{λ} = \frac{3\cdot 10^8\,m/s}{2{,}8} \Rightarrow f = \frac{15}{14}\cdot 10^8\,Hz$

γ) Έστω ο δέκτης $Δ_2$ που απέχει απόσταση x από την Π' και 8−x από την Π και καταγράφει απόσβεση

$Π'Δ_2 - ΠΔ_2 = (2k+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow x-(8-x) = (2k+1)1{,}4 \Rightarrow x = 1{,}4k+4{,}7$ (2)

$4 < x \le 8 \Rightarrow 4 < 1{,}4k+4{,}7 \le 8 \Rightarrow -0{,}7 \le 1{,}4k \le 3{,}3 \Rightarrow -0{,}5 \le k \le 2{,}35$

$\Rightarrow k=0,1,2$. Άρα μεταξύ θάλασσας και $π_2$ υπάρχουν τρεις υπερβολές απόσβεσης, και ο $Δ_2$ καταγράφει τρεις αποσβέσεις στις θέσεις $x = 1{,}4k+4{,}7$

Για $k=0 \rightarrow x = 4{,}7m$ ύψος $H = 0{,}7m$

$k=1 \rightarrow x = 6{,}1m$ ύψος $H = 2{,}1m$

$k=2 \rightarrow x = 7{,}5m$ ύψος $H = 3{,}5m$

δ) Και οι δύο δέκτες καταγράφουν τρεις αποσβέσεις ... στα σημεία τομής με τις τρεις υπερβολές απόσβεσης

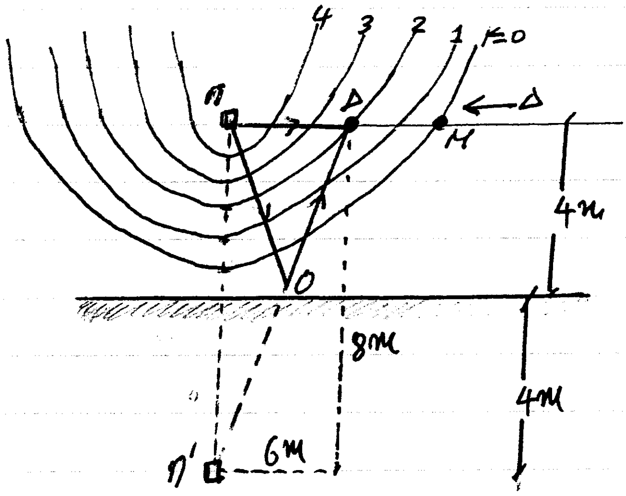
ε) $Δr = (2k+1)\frac{λ}{2} = (2\cdot 2+1)\cdot\frac{2{,}8}{2} \Rightarrow Δr = 7\,m$

15.3.14 α) Από το σχήμα

$Π'Δ = \sqrt{6^2+8^2} = 10\,m$

$ΠΔ = 6\,m$

Η τρίτη υπερβολή απόσβεσης όπως εξελίσσεται το φαινόμενο είναι για $k=2$



$(ΠΟΔ) - (ΠΔ) = (2\cdot 2+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow$

$Π'Δ - ΠΔ = 5\frac{λ}{2} \Rightarrow 10-6 = 2{,}5λ$

$\Rightarrow λ = 1{,}6\,m$

$c = λf \Rightarrow f = \frac{c}{λ} \Rightarrow f = 18{,}75\cdot 10^3\,Hz$

β) Η τελευταία από τον τοίχο Π απόσβεση είναι για $k=0$ (... είναι η πρώτη που καταγράφει ο δέκτης) και έστω ότι είναι σε απόσταση $ΠΜ = x$ από τον τοίχο.

$Π'Μ - ΠΜ = (2k+1)\frac{λ}{2} \xrightarrow{k=0} \sqrt{8^2+x^2} - x = (2\cdot 0+1)0{,}8$ ή

$\sqrt{64+x^2} = 0{,}8 + x \Rightarrow x = 39{,}6\,m$.

γ) $Π'Ρ - ΠΡ = (2k+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow$

$ψ - (8-ψ) = (2k+1)\cdot 0{,}8 \Rightarrow$

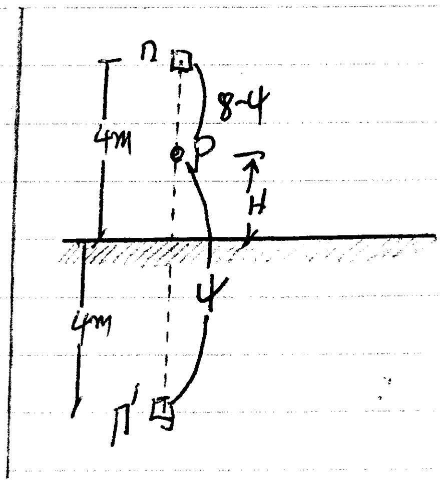
$\Rightarrow 2ψ - 8 = 1{,}6k + 0{,}8$

$\Rightarrow 2ψ = 1{,}6k + 8{,}8 \Rightarrow ψ = 0{,}8k + 4{,}4$

$4 < ψ \le 8 \Rightarrow 4 < 0{,}8k + 4{,}4 \le 8$

$\Rightarrow -0{,}4 < 0{,}8k \le 3{,}6$ ή $-0{,}5 < k \le 4{,}5$

$k = 0,1,2,3,4$ πέντε αποσβέσεις (αναγνώριση)



$k=0$, $ψ=4{,}4$, $H=0{,}4\,m$

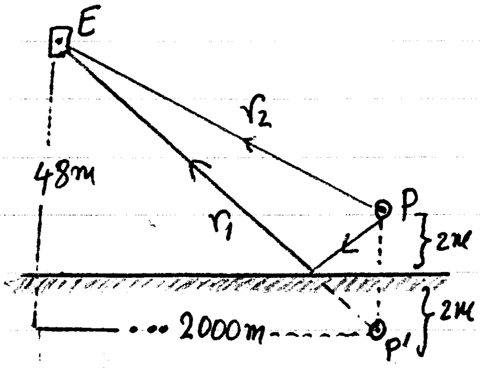
$k=1$, $ψ=5{,}2$, $H=1{,}2\,m$

$k=2$, $ψ=6{,}0$, $H=2\,m$

$k=3$, $ψ=6{,}8$, $H=2{,}8\,m$

$k=4$, $ψ=7{,}6$, $H=3{,}6\,m$

14.3.15 Από το σχήμα βρίσκουμε



$r_1=\sqrt{52^2+2000^2}=2000{,}675$ m

$r_2=\sqrt{48^2+2000^2}=2000{,}575$ m

$r_1-r_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 0{,}1=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow \lambda=\frac{0{,}2}{2k+1}$

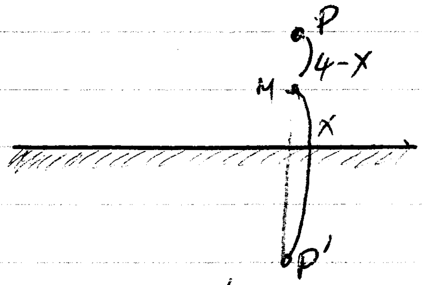
$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot 10^8}{0{,}2}(2k+1)$ ή $f=1{,}5\cdot 10^9(2k+1)$

$\longrightarrow 1\cdot 10^9\le f\le 3\cdot 10^9$ ή $10^9\le 1{,}5\cdot 10^9(2k+1)\le 3\cdot 10^9$

$\rightarrow 0{,}66\le 2k+1\le 2$ ή $-0{,}34\le 2k\le 1$ ή $-0{,}17\le k\le 0{,}5 \rightarrow k=0$.

άρα $\lambda=0{,}2$m και $f=1{,}5\cdot 10^9$ Hz

Θα βρούμε πόσες αποσβέσεις υπάρχουν μεταξύ θάλασσας και ραντάρ. $P'M-PM=(2k+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow$



$x-(4-x)=(2k+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow 2x-4=(2k+1)0{,}1$

$\Rightarrow 2x-4=0{,}2k+0{,}1\Rightarrow 2x=0{,}2k+4{,}1$

$\Rightarrow x=0{,}1k+2{,}05$

$2\le x\le 4$ ή $2<0{,}1k+2{,}05\le 4$

$\Rightarrow -0{,}05<0{,}1k\le 1{,}95\Rightarrow -0{,}5<k\le 19{,}5$

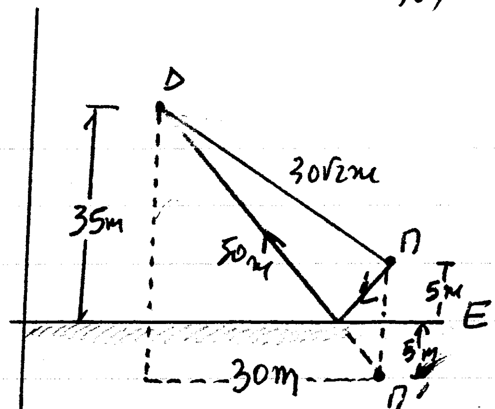
$\rightarrow k=0,\dots,19$, Άρα μεταξύ θάλασσας και ραντάρ υπάρχουν 20 αποσβέσεις

Για k=0 έχουμε την πρώτη απόσβεση που κοντά στη θάλασσα. Είναι αυτή που διέρχεται από τη θέση του ελικοπτέρου σε ύψος H=50m. Για k=19 έχουμε την πιο απομακρυσμένη απόσβεση και η οποία αντιστοιχεί στο ψηλότερο ύψος που δεν γίνεται ανιχνευτό το ελικόπτερο — Άρα δεν υπάρχει ύψος που να γίνεται ανιχνευτό το ελικόπτερο.

14.3.16. $\Pi'\Delta-\Pi\Delta=(2k+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow 50-42=(2k+1)\frac{\lambda}{2}\Rightarrow$

$\xrightarrow{k=2} 16=5\lambda\Rightarrow \lambda=3{,}2$m

$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot 10^8\ m/s}{3{,}2\ m}\Rightarrow f=0{,}9375\cdot 10^8$ Hz ή $f=93{,}75$ MHz

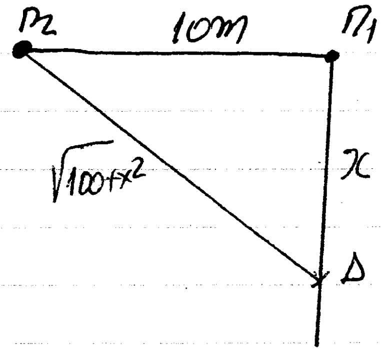


β) Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα μεταξύ Π και Ε υπάρχουν τρεις υπερβολές απόσβεσης ($k=0,1,2$). Ο δέκτης είναι στην υπερβολή $k=2$, άρα θα καταγράψει δύο ακρότατα αποσβέσεως στις θέσεις που θα συναντήσει τη υπερβολές αποσβέσεως $k=1$ και $k=0$

$\Pi'\Delta = \sqrt{40^2+30^2} = 50m$

$\Pi\Delta = \sqrt{30^2+30^2} = 30\sqrt{2}\,m$

14.3.17.



α) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8 m/s}{10^8 Hz} \Rightarrow \lambda = 3m$

β) $\Pi_2\Delta - \Pi_1\Delta = k\lambda \Rightarrow \sqrt{100+x^2} - x = k3$

$\Rightarrow 100+x^2 = 9k^2+6kx+x^2 \Rightarrow$

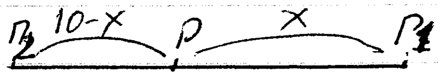
$\Rightarrow x = \frac{100-9k^2}{6k}$

Προφανώς $x>0 \overset{k>0}{\underset{k\neq 0}{\Rightarrow}} 100-9k^2>0$ ή $-9k^2>-100$ ή $k\leq 3,3$

$\Rightarrow k=1,2,3$

Άρα $x = \frac{100-9k^2}{6k}$ και θέτοντας $k=1,2,3$ βρίσκουμε

$x=15,16m$ $x=5,33m$ και $x=0,70m$



γ) P σημείο ενίσχυσης

$\Pi_1P - \Pi_2P = k\lambda$ ή $x-(10-x) = k3$

$\Rightarrow x-10+x = 3k$ ή $2x-10=3k$ ή $x=1,5k+5$

$0\leq x\leq 10$ ή $0\leq 1,5k+5\leq 10$ ή $-5\leq 1,5k\leq 5$

$\Rightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Άρα μεταξύ Π_1, Π_2 υπάρχουν 7 μέγιστα.